

III. Wielomiany i funkcje wymierne

W ogólnym przypadku wzory wyrażające zależność pierwiastków $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ równania $a_n x_n + a_{n-1} x_{n-1} + a_{n-2} x_{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$ od współczynników są następujące:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

$$x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_1 x_n + x_2 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n = -\frac{a_{n-2}}{a_n}$$

$$x_1 x_2 x_3 + \dots + x_{n-2} x_{n-1} x_n = -\frac{a_{n-3}}{a_n}$$

.....

$$\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k} = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}.$$

Związki te, sformułowane w 1591 roku przez matematyka francuskiego F. Viéte'a, na ogół nie ułatwiają wyznaczania pierwiastków równań algebraicznych, pozwalają jednak wyznaczyć wartości pewnych wyrażeń zależnych od pierwiastków. Na przykład:

Przykład 14

Nie rozwiązując równania: $3x^2 - 17x - 14 = 0$, obliczyć wartość wyrażenia

$$\frac{2x_1^2 + 3x_1 x_2 + 2x_2^2}{4x_1 x_2^2 + 4x_1^2 x_2},$$

gdzie liczby x_1 i x_2 są pierwiastkami danego równania.

Przekształcając powyższe wyrażenie do postaci:

$$\frac{2(x_1 + x_2)^2 - x_1 x_2}{4x_1 x_2 (x_1 + x_2)}$$

dla $x_1 + x_2 = \frac{17}{3}$, $x_1 x_2 = -14$ otrzymujemy:

$$\frac{2\left(\frac{17}{3}\right)^2 + 14}{4 \cdot (-14) \cdot \frac{17}{3}} = -\frac{155}{238}.$$

Przykład 15

Rozważmy np. równanie $x^3 - 7x + 5 = 9$. Można stwierdzić, że równanie to ma trzy pierwiastki rzeczywiste bez ich obliczania, gdyż wielomian

$$f(x) = x^3 - 7x + 5$$