Wzór (10.2a) jest prostą konsekwencją założenia o bezwzględnej całkowalności sygnału $x(t)$ oraz własności całek

$$|X(j\omega)| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt\right| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)e^{-j\omega t}|dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| \leqslant M.$$

Dowód drugiej z równości (10.2) jest znacznie bardziej skomplikowany, a jego szkic można znaleźć np. w [10.6]

Przykład 10.1.

Wyznaczymy *CTFT* niektórych sygnałów omawianych w rozdziale 1.

- Impuls prostokątny $x(t) = \Pi(t)$ (wzór (1.32)).

$$X(j\omega) = \int_{-0,5}^{0,5} \Pi(t)e^{-j\omega t}dt = \left.\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega}\right|_{t=-0,5}^{t=0,5} = \frac{\sin 0{,}5\omega}{0{,}5\omega} = Sa\left(\frac{\omega}{2}\right) = Sa(\pi f).$$

- Niesymetryczny sygnał wykładniczy $x(t) = e^{-\alpha t}\mathbf{1}(t)$, $\mathrm{Re}\,a > 0$.

$$X(j\omega) = \int_{0}^{\infty} e^{-at}e^{-j\omega t}dt = -\left.\frac{e^{-(a+j\omega)t}}{a+j\omega}\right|_{0}^{\infty} = \frac{1}{a+j\omega}.$$

- Symetryczny sygnał wykładniczy $x(t) = e^{-a|t|}$, $\mathrm{Re}\,a > 0$.

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|}e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{0} e^{at}e^{-j\omega t}dt + \int_{0}^{\infty} e^{-at}e^{-j\omega t}dt =$$

$$= \left.\frac{e^{(a-j\omega)t}}{a-j\omega}\right|_{t=-\infty}^{t=0} - \left.\frac{e^{-(a+j\omega)t}}{a+j\omega}\right|_{t=0}^{t=\infty} = \frac{2a}{a^2+\omega^2}.$$

Jak wynika z przykładu, nawet wtedy gdy sygnał $x(t)$ jest funkcją o wartościach rzeczywistych, jego transformata $X(j\omega)$ może być zespoloną funkcją zmiennej rzeczywistej ω. Funkcję $X(j\omega)$ nazywamy *widmem zespolonym sygnału* $x(t)$. Widmo zespolone sygnału można przedstawić w postaci wykładniczej $X(j\omega) = |X(j\omega)|e^{j\arg X(j\omega)}$. $|X(j\omega)|$ nazywamy *widmem amplitudowym*, a $\arg X(j\omega)$ *widmem fazowym* sygnału $x(t)$. Mówimy, że $x(t)$ jest *sygnałem o ograniczonym widmie*, jeżeli istnieje taka pulsacja ω_x, że $|X(j\omega)| = 0$, gdy $|\omega| > \omega_x$. Jeżeli istnieją takie pulsacje $\omega_{x1} < \omega_{x2}$, że $|X(j\omega)| = 0$, gdy $|\omega| < \omega_{x1}$ oraz $|\omega| > \omega_{x2}$, to $x(t)$ jest *sygnałem pasmowym*.

Twierdzenie 10.1 określa warunek dostateczny istnienia $\mathscr{F}$-transformaty. Można podać przykłady sygnałów, np. $Sa(t)$ (por. przykład 10.2), które nie są funkcjami bezwzględnie całkowalnymi, a mają *CTFT*, chociaż te transformaty nie muszą spełniać warunku (10.2).

Podobnie jak w przypadku innych omówionych w podręczniku transformat, wprowadza się odwrotną transformatę Fouriera $\mathscr{F}^{-1}$ (*ICTFT* – ***I****nverse* ***C****ontinuous* ***T****ime* ***F****ourier* ***T****ransform*).

$$\hat{x}(t) = \mathscr{F}^{-1}\big((X(j\omega)\big) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega. \tag{10.3}$$