1.17. Wyrażenie $\sin x$, $\cos x$ i $\operatorname{tg} x$ w zależności od $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$

1) $\sin x = \sin\frac{x}{1} = \dfrac{2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \dfrac{2t}{1+t^2}$;

2) $\cos x = \cos\frac{x}{1} = \dfrac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$;

3) $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x} = \left(\dfrac{2t}{1+t^2}\right)\left(\dfrac{1+t^2}{1-t^2}\right) = \dfrac{2t}{1-t^2}$.

Dzięki tym wyrażeniom musimy np. równanie $\sin x = 4-4\cos x$ zapisać w postaci prostego równania kwadratowego $4t^2-t = 0$.

Przykład 11

Znajdź sumę: $S = \cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha+\ \ldots\ +\cos(n\alpha)$.

Rozwiązanie

Pomnóżmy obie strony powyższej równości przez $2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$:

$$2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\alpha+2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos 2\alpha+$$

$$+2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos 3\alpha+\ \ldots\ +2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos n\alpha =$$

$$= \sin\left(\frac{3\alpha}{2}\right)-\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)+\sin\left(\frac{5\alpha}{2}\right)-\sin\left(\frac{3\alpha}{2}\right)+\sin\left(\frac{7\alpha}{2}\right)-$$

$$-\sin\left(\frac{5\alpha}{2}\right)+\ \ldots\ +\sin\left(\frac{(2n+1)\alpha}{2}\right)-\sin\left(\frac{(2n-1)\alpha}{2}\right) =$$

$$= -\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)+\sin\left(\frac{(2n+1)\alpha}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{n\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{(n+1)\alpha}{2}\right).$$

Odpowiedź

$$S = \frac{\sin\frac{n\alpha}{2}\cos\frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$